

2024 年成人高等学校招生全国统一考试专升本
高等数学(二)

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,满分 150 分,考试时间 150 分钟.

题 号	一	二	三	总 分	统分人签字
分 数					

第Ⅰ卷(选择题,共 84 分)

得 分	评卷人

一、选择题(1~12 小题,每小题 7 分,共 84 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = 2$, 则 $m =$ 【 】

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

2. 设 $y = \ln x + x^2$, 则 $y' =$ 【 】

- A. $\frac{1}{x} + 2x$ B. $\frac{1}{x} - 2x$ C. $\ln x + 2x$ D. $\ln x - 2x$

3. 设 $y = xe^{2x}$, 则 $y' =$ 【 】

- A. $(1+x)e^{2x}$ B. $(1+2x)e^{2x}$ C. $2xe^{2x}$ D. $(1-2x)e^{2x}$

4. 设随机变量 X 的概率分布为

X	3	4	5
P	0.1	a	0.6

则 $a =$ 【 】

- A. 0.1 B. 0.2 C. 0.3 D. 0.4

5. 曲线 $y = xe^{-x}$ 的拐点坐标为 【 】

- A. (0,0) B. $(2, 2e^{-2})$ C. $(-1, -e)$ D. $(1, e^{-1})$

6. 设 $f(x)$ 的一个原函数为 e^{x^2} , 则 $f(x) =$ 【 】

- A. e^{x^2} B. $2xe^{x^2}$ C. xe^{x^2} D. $2e^{x^2}$

7. $\int_{-1}^1 (\arctan x + x^2) dx =$ 【 】
- A. $\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. 0
8. $\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} dx =$ 【 】
- A. -4 B. -2 C. 0 D. 2
9. $\int \frac{(x+1)^2}{x} dx =$ 【 】
- A. $x^2 + x + \ln |x| + C$ B. $x^2 + 2x + \ln |x| + C$
- C. $\frac{x^2}{2} + x + \ln |x| + C$ D. $\frac{x^2}{2} + 2x + \ln |x| + C$
10. 设 $z = 2xy + \frac{x}{y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ 【 】
- A. $2x + \frac{1}{y}$ B. $2y + \frac{1}{y}$
- C. $2x + \frac{x}{y^2}$ D. $2x - \frac{x}{y^2}$
11. 设 $z = xf(y)$, 其中 f 可导, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ 【 】
- A. $f'(y)$ B. x C. $f(y)$ D. $xf(y)$
12. 设 A, B 为随机事件, 则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$ 的充要条件是 【 】
- A. $A \subset B$ B. $P(B - A) = 0$
- C. $A = B$ D. $P(A - B) = 0$

第 II 卷 (非选择题, 共 66 分)

得 分	评卷人

二、填空题 (13~15 小题, 每小题 7 分, 共 21 分)

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x}, & x \geq 1, \\ a \cos \pi x, & x < 1 \end{cases}$ 在 $x = 1$ 处连续, 则 $a =$ _____.
14. 若 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2a}{x-a} \right)^x = e^6$, 则 $a =$ _____.
15. 曲线 $y = x^3$ 在点 $(1, 1)$ 处法线的方程为 _____.

得 分	评卷人

三、解答题(16~18 题,每小题 15 分,共 45 分. 解答应写出推理、演算步骤)

16. (本题满分 15 分)

求函数 $f(x) = x^2(x-1)^2$ 的单调区间和极值.

17. (本题满分 15 分)

计算 $\int \sin^2 x dx$.

18. (本题满分 15 分)

求由抛物线 $y^2 = 2x$ 和直线 $x + y - 4 = 0$ 所围成的图形的面积.

参考答案及解析

一、选择题

1.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了等价无穷小代换的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{mx}{x} = m = 2.$

2.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了导数的计算的知识点.

【应试指导】 $y' = (\ln x + x^2)' = \frac{1}{x} + 2x.$

3.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的求导法则的知识点.

【应试指导】 $y' = (xe^{2x})' = e^{2x} + x(e^{2x})' = (1 + 2x)e^{2x}.$

4.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了概率分布的性质的知识点.

【应试指导】 $0.1 + a + 0.6 = 1$, 所以 $a = 0.3$.

5.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了函数的拐点的知识点.

【应试指导】 $y' = (xe^{-x})' = (1-x)e^{-x}$, $y'' = (x-2)e^{-x}$. 令 $y'' = 0$, 得 $x = 2$. 当 $x < 2$ 时, $y'' < 0$; 当 $x > 2$ 时, $y'' > 0$. 所以, 拐点为 $(2, 2e^{-2})$.

6.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了原函数的概念的知识点.

【应试指导】 $f(x) = (e^{x^2})' = e^{x^2} (x^2)' = 2xe^{x^2}.$

7.【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了定积分的性质和计算的知识点.

【应试指导】 原式 $= \int_{-1}^1 \arctan x dx + \int_{-1}^1 x^2 dx = 0 + 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{2}{3}.$

8.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了用换元法计算定积分的知识点.

【应试指导】 令 $\sqrt{x} = t$, 则 $x = t^2$, $dx = 2tdt$. 当 $x = 0$ 时, $t = 0$; 当 $x = \pi^2$ 时, $t = \pi$. $\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} dx = 2 \int_0^{\pi} t \cos t dt =$

$2 \int_0^{\pi} t \sin t dt = 2(t \sin t \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin t dt) = 2 \cos t \Big|_0^{\pi} = -4.$

9.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了不定积分的计算的知识点.

$$\text{【应试指导】 } \int \frac{(x+1)^2}{x} dx = \int \left(x + 2 + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{x^2}{2} + 2x + \ln|x| + C.$$

10.【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了偏导数的计算的知识点.

$$\text{【应试指导】 } \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - \frac{x}{y^2}.$$

11.【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二阶偏导数的计算的知识点.

$$\text{【应试指导】 } \frac{\partial z}{\partial x} = f(y), \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'(y).$$

12.【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了概率的性质的知识点.

【应试指导】 $P(A-B) = P(A) - P(AB)$, 故 $P(A-B) = P(A) - P(B)$ 的充要条件是 $P(AB) = P(B)$, 即 $B \subset A$, 故 $P(B-A) = 0$.

二、填空题

13.【答案】 -2

【考情点拨】 本题考查了连续函数的性质的知识点.

【应试指导】 因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续, 所以 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$, 而 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} a \cos \pi x = -a$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2}{x} = 2, \text{ 故有 } -a = 2, \text{ 即 } a = -2.$$

14.【答案】 2

【考情点拨】 本题考查了两个重要极限的知识点.

$$\text{【应试指导】 } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3a}{x-a}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}} = e^{3a} = e^6, \text{ 故 } a = 2.$$

15.【答案】 $x+3y-4=0$

【考情点拨】 本题考查了法线方程的知识点.

【应试指导】 $y' = 3x^2$, 则 $k_{\text{切}} = 3x^2 \Big|_{x=1} = 3$, 故 $k_{\text{法}} = -\frac{1}{3}$, 则法线方程为 $y-1 = -\frac{1}{3}(x-1)$, 化简为 $x+3y-4=0$.

三、解答题

16. $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$.

因为 $f(x) = x^2(x-1)^2 = x^4 - 2x^3 + x^2$, 则

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 4x^3 - 6x^2 + 2x \\
 &= 2x(2x^2 - 3x + 1) \\
 &= 2x(x-1)(2x-1),
 \end{aligned}$$

令 $f'(x) = 0$, 得驻点 $x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = 1$.

列表:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	极小值 $f(0) = 0$	$\nearrow$	极大值 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$	$\searrow$	极小值 $f(1) = 0$	$\nearrow$

所以, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{1}{2}), (1, +\infty)$; 单调递减区间为 $(-\infty, 0), (\frac{1}{2}, 1)$.

极大值为 $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$, 极小值为 $f(0) = f(1) = 0$.

$$\begin{aligned}
 17. \int \sin^2 x dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx \\
 &= \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \\
 &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.
 \end{aligned}$$

$$18. \text{联立} \begin{cases} y^2 = 2x, \\ x + y - 4 = 0, \end{cases} \text{解得交点 } (2, 2), (8, -4).$$

所以所求平面图形的面积为

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-4}^2 \left(4 - y - \frac{y^2}{2} \right) dy \\
 &= \left(4y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{6} \right) \Big|_{-4}^2 \\
 &= 18.
 \end{aligned}$$