

2023 年成人高等学校招生全国统一考试专升本 高等数学(一)

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分。满分 150 分,考试时间 150 分钟。

第 I 卷(选择题,共 40 分)

一、选择题(1~10 小题,每小题 4 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $5x - \sin 5x$ 是 x 的 ()

- A. 高阶无穷小量
- B. 等价无穷小量
- C. 同阶无穷小量,但不是等价无穷小量
- D. 低阶无穷小量

2. 设 $y = \sqrt{2x+1}$, 则 $y' =$ ()

- A. $\frac{3}{2\sqrt{2x+1}}$
- B. $\frac{1}{2\sqrt{2x+1}}$
- C. $\frac{2}{\sqrt{2x+1}}$
- D. $\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$

3. 设 $y = e^{-x}$, 则 $dy =$ ()

- A. $e^{-x}dx$
- B. $-e^{-x}dx$
- C. $e^x dx$
- D. $-e^x dx$

4. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ b+x, & x > 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连接, 则 $b =$ ()

- A. 2
- B. 1
- C. 0
- D. -1

5. $\int \sin x dx =$ ()

- A. $\sin x + C$
- B. $-\sin x + C$
- C. $\cos x + C$
- D. $-\cos x + C$

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t dt}{x^2} =$ ()

- A. 2
- B. 1
- C. $\frac{1}{2}$
- D. 0

7. 设 $z = \frac{x}{y} + xy$, 则 $\frac{\partial z}{\partial y} =$ ()

A. $\frac{1}{y} + y$ B. $-\frac{x}{y^2} + x$ C. $\frac{1}{y} + x$ D. $-\frac{x}{y^2} + y$

8. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 的收敛域是 ()

A. $(-1,1)$ B. $(-1,1]$ C. $[-1,1)$ D. $[-1,1]$

9. 已知直线 $\frac{x-1}{k} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-4}$ 在平面 $3x-2y+z-7=0$ 上, 则 $k =$ ()

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

10. 微分方程 $y'' + y = e^{2x}$ 的一个特解是 ()

A. $y^* = \frac{1}{5}e^{2x}$ B. $y^* = \frac{1}{5}e^x$ C. $y^* = \frac{1}{5}xe^{2x}$ D. $y^* = \frac{1}{5}xe^x$

第 II 卷(非选择题, 共 110 分)

二、填空题(11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} =$ _____.

12. 设 $\begin{cases} x = 1+t^2, \\ y = t^3 \end{cases}$ (t 为参数), 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=2} =$ _____.

13. 设 $y = x + e^x$, 则 $y'' =$ _____.

14. 设 $y = x + \sin x$, 则 $y' =$ _____.

15. $\int (x^2 + e^x) dx =$ _____.

16. $\int_{-\infty}^0 e^{3x} dx =$ _____.

17. 设 $z = e^{xy}$, 则 $dz =$ _____.

18. 过点 $(0,1,1)$ 且与直线 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ 垂直的平面方程为 _____.

19. 设区域 $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 2, -1 \leq y \leq 1\}$, 则 $\iint_D x dx dy =$ _____.

20. 微分方程 $xy' + y = 0$ 满足初始条件 $y(1) = 1$ 的解为 $y =$ _____.

三、解答题(21~28 题, 共 70 分. 解答应写出推理、演算步骤)

21. (本题满分 8 分)

计算 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x}$.

22. (本题满分 8 分)

计算 $\int_0^2 (x^2 - e^{-x}) dx$.

23. (本题满分 8 分)

求微分方程 $y' - \frac{2}{x}y = x^3$ 的通解.

24. (本题满分 8 分)

设 $z = \sin xy$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.

25. (本题满分 8 分)

求函数 $f(x) = x^2 e^{-x}$ 的单调区间和极值.

26. (本题满分 10 分)

设 D 是由曲线 $y=1-x^2 (x \geq 0)$, $x=0$, $y=0$ 所围成的平面图形.

(1) 求 D 的面积 S ;

(2) 求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积 V .

27. (本题满分 10 分)

计算 $\iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy$, 其中 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$, $y=x$, $y=-x$ 所围成的闭区域.

28. (本题满分 10 分)

已知函数 $f(x)$ 连续, 且满足 $\int_0^x (1+t^2)f(t)dt = x \sin x$, 求 $f(x)$.

高等数学(一)

参考答案及解析

一、选择题

1. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了高阶无穷小量的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x - \sin 5x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} (5 - \frac{\sin 5x}{x}) = 5 - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{x} = 0,$

故 $5x - \sin 5x$ 是 x 的高阶无穷小量.

2. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了复合函数求导的知识点.

【应试指导】 $y' = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} (2x+1)' = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}} = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}.$

3. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了微分的知识点.

【应试指导】 $dy = (e^{-x})' dx = -e^{-x} dx.$

4. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了分段函数连续性的知识点.

【应试指导】 因 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连接, 则有 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$, 故 $b=1$.

5. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了不定积分的知识点.

【应试指导】 $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

6. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了洛必达法则的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t dt}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

7. 【答案】 B

【考情点拨】 本题考查了偏导数的知识点.

【应试指导】 $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + x$.

8. 【答案】 D

【考情点拨】 本题考查了幂级数收敛域的知识点.

【应试指导】 收敛半径 $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$, 所以幂级数的收敛区间

为 $(-1, 1)$. 当 $x = -1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 为收敛的交错级数;

当 $x = 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 为收敛的 p 级数. 故该级数的收敛域为 $[-1, 1]$.

9. 【答案】 C

【考情点拨】 本题考查了直线与平面的位置关系的知识点.

【应试指导】 由题可知直线的方向向量 $s = (k, 1, -4)$, 平面的法向量 $n = (3, -2, 1)$. 由于 $s \perp n$, 因此有 $3k - 2 - 4 = 0$, 故 $k = 2$.

10. 【答案】 A

【考情点拨】 本题考查了二阶常系数线性非齐次微分方程特解的知识点.

【应试指导】 可验证, 四个选项中只有 A 项满足微分方程, 故其特解为 $y^* = \frac{1}{5}e^{2x}$.

二、填空题

11. 【答案】 e^2

【考前点拨】 本题考察了两个重要极限的知识点.

【应试指导】 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [(1+2x)^{\frac{1}{2x}}]^2 = e^2$.

12. 【答案】 3

【考情点拨】 本题考查了参数方程求导的知识点.

【应试指导】 $\frac{dy}{dx} = \frac{(t^3)'}{(1+t^2)'} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t$, 故 $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=2} = 3$.

13. 【答案】 e^x

【考情点拨】 本题考查了高阶导数的知识点.

【应试指导】 $y' = 1 + e^x$, 故 $y'' = e^x$.

14. 【答案】 $1 + \cos x$

【考情点拨】 本题考查了导数的运算的知识点.

【应试指导】 $y' = (x + \sin x)' = 1 + \cos x$.

15. 【答案】 $\frac{1}{3}x^3 + e^x + C$

【考情点拨】 本题考查了不定积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int (x^2 + e^x) dx = \frac{1}{3}x^3 + e^x + C$.

16. 【答案】 $\frac{1}{3}$

【考情点拨】 本题考查了特殊定积分的计算的知识点.

【应试指导】 $\int_{-\infty}^0 e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int_{-\infty}^0 e^{3x} d(3x) = \frac{1}{3} e^{3x} \Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{3} (1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{3x}) = \frac{1}{3}$.

17. 【答案】 $e^{xy}(ydx + xdy)$

【考情点拨】 本题考查了全微分的知识点.

【应试指导】 $dz = de^{xy} = e^{xy} d(xy) = e^{xy}(ydx + xdy)$.

18. 【答案】 $x + 2y + z - 3 = 0$.

【考情点拨】 本题考察了平面点法式方程的知识点.

【应试指导】 由题意, 平面法向量为 $n = (1, 2, 1)$, 又过点 $(0, 1, 1)$, 故方程为 $x + 2(y - 1) + (z - 1) = 0$,

即 $x + 2y + z - 3 = 0$.

19. 【答案】 4

【考情点拨】 本题考查了二重积分的知识点.

【应试指导】 $\iint_D x dx dy = \int_0^2 dx \int_{-1}^1 x dy = \int_0^2 (xy \Big|_{-1}^1) dx = \int_0^2 2x dx = x^2 \Big|_0^2 = 4$.

20. 【答案】 $\frac{1}{x}$

【考前点拨】 本题考查了一阶线性齐次微分方程的知识点.

【应试指导】 由 $xy' + y = 0$ 得 $y' + \frac{1}{x}y = 0$, 通解为 $y = Ce^{-\int \frac{1}{x} dx} = \frac{C}{x}$,

将 $y(1) = 1$ 代入通解, 得 $C = 1$, 故所求的解为 $y = \frac{1}{x}$.

三、解答题

$$\begin{aligned}
 21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{2} \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22. \int_0^2 (x^2 - e^{-x}) dx &= \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 e^{-x} d(-x) \\
 &= \left(\frac{1}{3} x^3 + e^{-x} \right) \Big|_0^2 \\
 &= \frac{5}{3} + e^{-2}.
 \end{aligned}$$

$$23. \text{由题可知 } P(x) = -\frac{2}{x}, Q(x) = x^3.$$

$$\begin{aligned}
 \text{通解为 } y &= e^{-\int P(x) dx} \left(\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx + C \right) \\
 &= e^{\int \frac{2}{x} dx} \left(\int x^3 e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx + C \right) = x^2 \left(\int x^3 \cdot \frac{1}{x^2} dx + C \right) \\
 &= x^2 \left(\int x dx + C \right) = x^2 \left(\frac{1}{2} x^2 + C \right) = \frac{1}{2} x^4 + Cx^2.
 \end{aligned}$$

$$24. \frac{\partial z}{\partial x} = \cos xy (xy)' = y \cos xy.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y(\cos xy)' = -y \sin xy (xy)' = -y^2 \sin xy$$

$$25. f(x) \text{ 的定义域为 } (-\infty, +\infty), f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(-x^2 + 2x),$$

令 $f'(x) = 0$, 得 $x_1 = 0, x_2 = 2$. 列表如下:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
y'	-	0	+	0	-
y	$\searrow$	极小值	$\nearrow$	极大值	$\searrow$

由表可知, 函数的单调增区间为 $(0, 2)$; 单调减区间为 $(-\infty, 0), (2, +\infty)$.

极大值为 $f(2) = 4e^{-2}$, 极小值为 $f(0) = 0$.

$$26. (1) S = \int_0^1 (1-x^2) dx = \left(x - \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3};$$

$$(2) V = \pi \int_0^1 (1-x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 (1-2x^2+x^4) dx \\ = \pi \left(x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right) \Big|_0^1 = \frac{8}{15}\pi.$$

$$27. \text{积分区域用极坐标可表示为 } D: \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}, 0 \leq r \leq 1.$$

$$\text{故 } \iint_D \sqrt{x^2+y^2} dx dy = \iint_D r^2 dr d\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^1 r^2 dr \\ = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{r^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}.$$

$$28. \text{由于 } \int_0^x (1+t^2)f(t)dt = x \sin x,$$

$$\text{两边同时求导得 } (1+x^2)f(x) = \sin x + x \cos x,$$

$$\text{所以 } f(x) = \frac{\sin x + x \cos x}{1+x^2}.$$